

БИР ЎЗГАРУВЧИ ФУНКЦИЯСИНING ДИФФЕРЕНЦИАЛ ҲИСОБИ

1- §. Ҳосила. Ҳосилалар жадвали

3.1.1. $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги орттирмаси Δy нинг аргумент орттирмаси Δx га нисбатининг Δx нолга интилгандаги limiti мавжуд бўлса, бу лимит $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги *ҳосиласи* дейилади.

Ҳосиланинг белгиланиши:

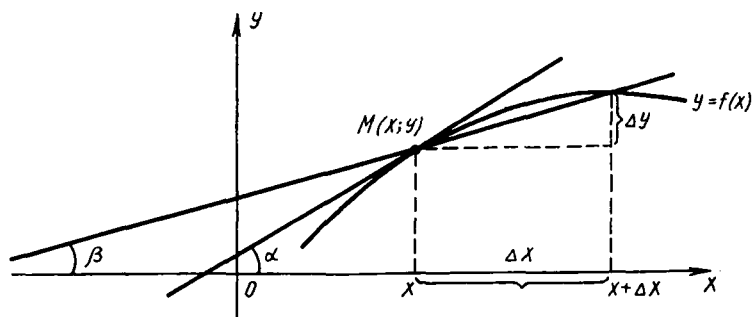
$$y' \text{ ёки } f'(x_0) \text{ ёки } \frac{dy}{dx} \text{ ёки } \frac{df}{dx}.$$

Шундай қилиб, таърифга кўра:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Агар $y=f(x)$ функция x_0 нуктада ҳосилага эга бўлса, у ҳолда $f(x)$ функция x_0 нуктада *дифференциалланувчи* дейилади, ҳосилани топиш жараёни *дифференциаллаш* дейилади.

3.1.2. Геометрик нуктаи назардан $y=f(x)$ функциянинг x_0 нуктадаги ҳосиласи унинг графигига $M(x_0, f(x_0))$ нуктада ўтказилган уринманинг Ox ўқининг мусбаб йўналиши билан ҳосил қилган бурчагининг тангенсига тенг (19- шакл).



19- шакл

$y=f(x)$ эгри чизикка $M_0(x_0, y_0)$ нуктада ўтказилган уринма тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0),$$

бунда $y_0 = f(x_0)$.

$y=f(x)$ функция графигига уриниш нуктаси $M_0(x_0, y_0)$ да ўтказилган нормалнинг тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0), \text{ агар } f'(x_0) \neq 0 \text{ бўлса,}$$

$$x = x_0, \text{ агар } f'(x_0) = 0 \text{ бўлса.}$$

$y=f_1(x)$ ва $y=f_2(x)$ эгри чизиклар $M_0(x_0, y_0)$ нуктада кесишсин, бу нуктадаги улар орасидаги бурчак деб $M_0(x_0, y_0)$ да уларга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади ва у қуйидаги формуладан топилади:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{f'_2(x_0) - f'_1(x_0)}{1 + f'_2(x_0) \cdot f'_1(x_0)}.$$

3.1.3. x — эрки ўзгарувчи, $u=u(x)$ ва $v=v(x)$ дифференциалланувчи функциялар, C — ўзгармас сон бўлсин, u ҳолда қуйидаги дифференциаллаш қоидалари ўринли:

$$1. C' = 0.$$

$$5. (Cu)' = Cu'.$$

$$2. x' = 1.$$

$$6. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

$$3. (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

$$4. (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

$$7. \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}.$$

8. Агар $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, яъни $y=f(\varphi(x))$ — мураккаб функция бўлса, u ҳолда:

$$y' = f'(u) \cdot \varphi'(x).$$

9. Агар $y=f(x)$ ва $x=\varphi(y)$ — ўзаро тескари функциялар бўлса, u ҳолда $f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$.

3.1.4. Ҳосилалар жадвали:

$$1. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u' \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$5. (e^u)' = e^u \cdot u'.$$

$$2. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$$

$$6. (u^v)' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

$$3. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'.$$

$$7. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'.$$

$$4. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

$$8. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

$$9. (\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

$$10. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$$

$$11. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$$

$$12. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$$

$$13. (\sec u)' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot u' = \operatorname{tg} u \cdot \sec u \cdot u'.$$

$$14. (\operatorname{cosec} u)' = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot u' = -\operatorname{ctg} u \cdot \operatorname{cosec} u \cdot u'.$$

$$15. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$16. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$$

$$17. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$18. (\operatorname{arcc} \operatorname{tg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$19. (\operatorname{arcsec} u)' = \frac{1}{u \sqrt{u^2-1}} \cdot u'.$$

$$20. (\operatorname{arccosec} u)' = -\frac{1}{u \sqrt{u^2-1}} \cdot u'.$$

$$21. (\operatorname{sh} u)' = \left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$$

$$22. (\operatorname{ch} u)' = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$$

$$23. (\operatorname{th} u)' = \left(\frac{\operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} u} \right)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'.$$

$$24. (\operatorname{cth} u)' = \left(\frac{\operatorname{ch} u}{\operatorname{sh} u} \right)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$$

1-мисол. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, $y = \frac{2x+1}{x+3}$ функциянинг ҳосиласини топинг.

Ечиш. x га Δx орттирма бериб, Δy орттирмани топамиз:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{2(x+\Delta x)-1}{x+\Delta x+3} - \frac{2x-1}{x+3} = \\ &= \frac{(2x+2\Delta x-1)(x+3) - (x+\Delta x+3)(2x-1)}{(x+\Delta x+3)(x+3)} = \frac{7\Delta x}{(x+\Delta x+3)(x+3)}. \end{aligned}$$

Δy нинг Δx га нисбати

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{7}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)}.$$

$\Delta x \rightarrow 0$ да шу нисбатнинг лимитини ҳисоблаймиз:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{7}{(x + \Delta x + 3)(x + 3)} = \frac{7}{(x + 3)^2}.$$

Шундай қилиб, ҳосиланинг таърифига кўра:

$$y' = \left(\frac{2x-1}{x+3} \right)' = \frac{7}{(x+3)^2}.$$

2-мисол. $y = |x|$ функция ҳар қандай x да узлуксиз. $x=0$ да бу функция дифференциалланмаслигига ишонч ҳосил қилинг.

Ечиш. $x=0$ нуктада аргументга Δx орттирма берамиз, у ҳолда функция Δy орттирма олади:

$$\Delta y = |\Delta x| = \begin{cases} -\Delta x, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ \Delta x, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса;} \end{cases}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{агар } \Delta x < 0 \text{ бўлса,} \\ 1, & \text{агар } \Delta x > 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

Демак, $x=0$ нуктада $y = |x|$ функция ҳосилга эга эмас, чунки

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ нисбатнинг $\Delta x \rightarrow 0$ даги лимити мавжуд эмас.

3-мисол. $y = 8 - x^2$ ва $y = x^2$ парабодаларнинг кесишиш бурчакларини топинг.

Ечиш. Парабодалар тенгламаларини биргаликда ечиб, уларнинг кесишиш нукталари $A(2, 4)$ ва $B(-2, 4)$ ни топамиз. Парабодалар тенгламаларини дифференциаллаймиз: $y' = -2x$, $y' = 2x$. Бу ҳосилаларнинг A ва B нукталардаги қийматларини ҳисоблаймиз ва эгри чизиқлар орасидаги бурчак формуласидан фойдаланиб топамиз:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{4+4}{1-16} = -\frac{8}{15} \text{ ва } \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-4-4}{1-16} = \frac{8}{15}.$$

Бундан: $\varphi_1 = \arctg\left(-\frac{8}{15}\right)$ ва $\varphi_2 = \arctg \frac{8}{15}$.

3.1.5. $y=f(x)$ функциянинг *логарифмик ҳосиласи* деб, шу функциянинг логарифмидан олинган ҳосилга айтилади, яъни:

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Функцияни олдиндан логарифмлашдан фойдаланиш баъзан унинг ҳосиласини топишни осонлаштиради. Функцияни логарифмлаш

рифмлаш ва дифференциаллашни кетма-кет қўллаш *логарифмик дифференциаллаш* деб аталади.

4- м и с о л. Функция ҳосиласини топинг:

$$y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x.$$

Е ч и ш. Бу функцияни логарифмлаймиз:

$$\ln y = \frac{2}{3} \ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3 \ln \sin x + 2 \ln \cos x.$$

Тенгликнинг иккала қисмини x бўйича дифференциаллаймиз:

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + \frac{3}{\sin x} \cdot \cos x - \frac{2 \sin x}{\cos x},$$

бундан

$$y' = y \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right).$$

1- дарсхона топшириғи

1. Ҳосила таърифидан фойдаланиб, $y = \frac{4x^2-1}{x^2+1}$ функция ҳосиласини топинг.

$$\text{Ж: } y' = \frac{10x}{(x^2+1)^2}.$$

2. $y = \sqrt[3]{x}$ функциянинг $x=0$ нуктада узлуксиз ва дифференциалланувчи бўлиш-бўлмаслигини аниқланг.

3. $y = (x+1) \sqrt[3]{3-x}$ эгри чизикқа абсциссаси $x_0 = -1$ бўлган нуктада ўтказилган уринма ва нормал тенгламасини тузинг.

$$\text{Ж: } y = \sqrt[3]{4}(x+1) \text{ ва } y = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x+1).$$

4. $y = \sin x$ ва $y = \cos x$ эгри чизиклар қандай бурчак остида кесишади?

$$\text{Ж: } \operatorname{arctg} 2 \sqrt{2} \approx 70^\circ 30'.$$

5. Қуйидаги функцияларнинг ҳосилаларини дифференциаллаш қоидалари ва формулаларини қўллаб топинг:

$$\text{a) } y = \frac{\sqrt{4x+1}}{x^2}; \quad \text{б) } y = x^2 \sqrt{1-x^2};$$

$$\text{в) } y = \sin^4 x + \cos^4 x; \quad \text{г) } y = \sqrt[4]{1+\cos^2 x};$$

$$\text{д) } y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}; \quad \text{е) } y = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x + 3x.$$

1- мустақил иш

1. $y = \frac{8}{4+x^2}$ эгри чизикка $x_0=2$ нуктада ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламасини тузинг.

Ж: $y = -\frac{x}{2} + 2$ ва $y = 2x - 3$.

2. $y = \frac{3x-2}{4x+7}$ функция ҳосиласини таърифдан фойдаланиб топинг.

Ж: $\frac{29}{(4x+7)^2}$.

3. Куйидаги функцияларнинг ҳосиласини топинг:

а) $y = \frac{3x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2}}$;

б) $y = 2 \sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$;

в) $y = 3x \sin^3 x + 3 \cos x - \cos^3 x$;

г) $y = \operatorname{tg}^4 \frac{x}{2} - \operatorname{ctg}^4 \frac{x}{2}$;

д) $y = \left(\frac{\sin x}{1 + \cos x} \right)^2$;

е) $y = \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}$.

2- дарсхона топиширғи

Куйидаги функцияларнинг ҳосилаларини дифференциаллаш қоидалари ва формулаларидан фойдаланиб топинг:

1. а) $y = x^2 \sin 2x$;

б) $y = e^{4x} \operatorname{tg} 2x$;

в) $y = \sqrt[3]{x^3 + \sin^3 x}$;

г) $y = \sqrt{x^2 + 1} \cdot \operatorname{ctg}^2 3x$;

д) $y = 3^{-\cos^3 3x}$;

е) $y = e^{-\arcsin \sqrt{x}}$.

2. а) $y = (3x^3 - \operatorname{ctg}^4 x)^3$;

б) $y = \ln^3 (\sqrt{x} - 2^{-x^2})$;

в) $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{x}$;

г) $y = e^{-\sqrt{x^2 - 3x + 3}}$;

д) $y = \operatorname{sh}^2 x^3$;

е) $y = \arcsin \operatorname{tg} \sqrt{1+x^2}$.

3. а) $y = (2^{x^3} - \operatorname{tg}^4 2x)^3$;

б) $y = x^3 \operatorname{th}^3 x$;

в) $y = \lg^4 (x^5 - \sin^5 2x)$;

г) $y = \arcsin \operatorname{ctg} \sqrt{1+e^{-x^2}}$;

д) $y = (\sin 2x)^{\cos 4x}$;

е) $y = (x^2 + 1)^{\operatorname{ctg} 2x}$.

4. а) $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5 (x-3)^{11}}}$;

б) $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \cdot \sqrt{(x+3)^3}}$.